Exámenes de Selectividad

Física. Cataluña 2022, Extraordinaria

mentoor.es

Cuestión 1. Campo Gravitatorio

El potencial gravitatorio en un punto situado a una distancia r del centro de un planeta es $V = -9,1 \cdot 10^8$ J/kg. La intensidad de campo en la superficie del planeta es $g_0 = 26$ m/s^2 y el radio del planeta es $R = 7 \cdot 10^4$ km. Deduce una relación que proporcione la distancia r en función de V, R y g_0 y calcula el valor de r.

Solución:

Tenemos que:

- Potencial gravitatorio en un punto: $V = -9,1 \cdot 10^8$ J/kg
- Intensidad de campo en la superficie del planeta: $g_0 = 26$ m/s^2
- Radio del planeta: $R = 7 \cdot 10^4$ km $= 7 \cdot 10^7$ m

La definición del potencial gravitatorio V en un punto a una distancia r del centro de un planeta es:

$$V = -\frac{G \cdot M}{r},$$

donde:

- G es la constante de gravitación universal.
- M es la masa del planeta,
- r es la distancia desde el centro del planeta hasta el punto considerado.

En la superficie del planeta, la intensidad del campo gravitatorio g_0 está relacionada con la masa del planeta y su radio mediante:

$$g_0 = \frac{G \cdot M}{R^2}.$$

Despejamos $G \cdot M$ de la ecuación anterior:

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2.$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación del potencial gravitatorio:

$$V = -\frac{g_0 \cdot R^2}{r}.$$

Despejamos r en función de V, R y g_0:

$$r = -\frac{g_0 \cdot R^2}{V}.$$

Dado que el potencial gravitatorio V es negativo, la expresión se simplifica a:

$$r = \frac{g_0 \cdot R^2}{|V|}.$$

Sustituyendo los valores proporcionados:

$$r = \frac{26 \text{ m/s}^2 \cdot (7 \cdot 10^7 \text{ m})^2}{9,1 \cdot 10^8 \text{ J/kg}} = 1,4 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

Por lo tanto, $r = \frac{g_0 \cdot R^2}{|V|}$ y la distancia r es $1,4 \cdot 10^8$ m.

Cuestión 2. Campo Gravitatorio

Deduce la relación entre la energía mecánica de un satélite y el radio de su órbita circular alrededor de un planeta. Dos satélites, A y B, de igual masa siguen órbitas circulares, uno con energía mecánica $E_A = -4 \cdot 10^{10}$ J y otro con $E_B = -2 \cdot 10^{10}$ J. Razona cuál de los dos satélites tiene mayor energía cinética y cuál se encuentra más lejos del planeta.

Solución:

Consideremos un satélite de masa m que orbita circularmente alrededor de un planeta de masa M y radio r. Las fuerzas que actúan sobre el satélite son la fuerza centrípeta necesaria para mantener la órbita y la fuerza gravitatoria que actúa como dicha fuerza centrípeta:

$$F_{\text{centrípeta}} = F_{\text{gravitatoria}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2},$$

donde v es la velocidad orbital del satélite y G es la constante de gravitación universal ($G = 6,674 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2). Simplificando la ecuación:

$$v^2 = \frac{G \cdot M}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}.$$

La energía cinética del satélite en órbita es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{G \cdot M}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{2r}.$$

La energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}.$$

La energía mecánica total del satélite es la suma de su energía cinética y su energía potencial gravitatoria:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{G \cdot M \cdot m}{2r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2r}.$$

De esta relación, observamos que la energía mecánica total E_m es inversamente proporcional al radio r de la órbita circular:

$$E_m \propto -\frac{1}{r}.$$

Dado que los satélites A y B tienen la misma masa y siguen órbitas circulares, podemos comparar sus energías mecánicas para determinar las diferencias en sus energías cinéticas y radios de órbita:

$$E_m = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2r}.$$

De esta relación, vemos que una mayor energía mecánica negativa ($|E_m|$ más grande) corresponde a un radio r menor. Es decir, cuanto más negativo es E_m, más cerca está el satélite del planeta.

- Satélite A:

$$E_A = -4 \cdot 10^{10} \text{ J} \quad \Rightarrow \quad -4 \cdot 10^{10} \text{ J} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2r_A} \quad \Rightarrow \quad r_A = \frac{G \cdot M \cdot m}{8 \cdot 10^{10} \text{ J}}.$$

- Satélite B:

$$E_B = -2 \cdot 10^{10} \text{ J} \quad \Rightarrow \quad -2 \cdot 10^{10} \text{ J} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2r_B} \quad \Rightarrow \quad r_B = \frac{G \cdot M \cdot m}{4 \cdot 10^{10} \text{ J}}.$$

Observamos que $r_A < r_B$ ya que $\frac{G \cdot M \cdot m}{8 \cdot 10^{10}} < \frac{G \cdot M \cdot m}{4 \cdot 10^{10}}$ (el satélite A se encuentra más cerca del planeta que el satélite B.). La energía cinética E_c de cada satélite está relacionada con su energía mecánica E_m mediante:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{G \cdot M}{r} = -E_m.$$

Para cada satélite:

- Satélite A:
$$E_{c,A} = -E_A = 4 \cdot 10^{10} \text{ J.}$$
- Satélite B:
$$E_{c,B} = -E_B = 2 \cdot 10^{10} \text{ J.}$$

Entonces, el satélite A tiene una mayor energía cinética que el satélite B.

Por lo tanto, la energía mecánica de un satélite en órbita circular es inversamente proporcional al radio de su órbita, y el satélite A tiene una mayor energía cinética y se encuentra más cerca del planeta, mientras que el satélite B tiene una menor energía cinética y se encuentra más lejos del planeta.

Cuestión 3. Campo Electromagnético

Una carga de 3 μC entra con velocidad $\vec{v} = 10^4\ \vec{\imath}$ m/s en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico $\vec{E} = 10^4\ \vec{\jmath}$ N/C y un campo magnético $\vec{B} = (\vec{\imath} + \vec{k})$ T. Determina el valor de las fuerzas eléctrica, magnética y total que actúan sobre la carga.

Solución:

Observamos que:

- Carga: $q = 3\ \mu\text{C} = 3 \cdot 10^{-6}$ C,
- Velocidad: $\vec{v} = 10^4\ \vec{\imath}$ m/s,
- Campo eléctrico: $\vec{E} = 10^4\ \vec{\jmath}$ N/C,
- Campo magnético: $\vec{B} = \vec{\imath} + \vec{k}$ T.

La fuerza eléctrica que actúa sobre una carga en un campo eléctrico está dada por:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}.$$

Sustituyendo los valores proporcionados:

$$\vec{F}_e = 3 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 10^4\ \vec{\jmath}\ \text{N/C} = 0,03\ \vec{\jmath}\ \text{N}.$$

La fuerza magnética que actúa sobre una carga en movimiento en un campo magnético está dada por la Ley de Lorentz:

$$\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Calculamos el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\vec{v} \times \vec{B} = (10^4\ \vec{\imath}) \times (\vec{\imath} + \vec{k}) = 10^4\ (\vec{\imath} \times \vec{\imath}) + 10^4\ (\vec{\imath} \times \vec{k}) = 0 + 10^4\ (-\vec{\jmath}) = -10^4\ \vec{\jmath}\ \text{m/s} \cdot \text{T}.$$

Entonces,

$$\vec{F}_m = 3 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot (-10^4\ \vec{\jmath}) = -0,03\ \vec{\jmath}\ \text{N}.$$

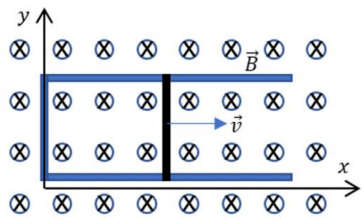
La fuerza total que actúa sobre la carga es la suma vectorial de las fuerzas eléctrica y magnética:

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = 0,03\ \vec{\jmath}\ \text{N} + (-0,03\ \vec{\jmath}\ \text{N}) = 0\ \text{N}.$$

Por lo tanto, la fuerza eléctrica es $\vec{F}_e = 0,03\ \vec{\jmath}$ N, la fuerza magnética es $\vec{F}_m = -0,03\ \vec{\jmath}$ N y la fuerza total es cero.

Cuestión 4. Campo Electromagnético

El circuito de la figura está formado por una barra metálica que desliza sobre un conductor en forma de ⊏. Sobre dicho circuito actúa un campo magnético perpendicular al plano xy, como aparece en la figura. Razona por qué se genera una corriente inducida en el circuito y cuál es su sentido (indícalo claramente con un dibujo). Escribe la ley física en la que te basas para responder, indicando las magnitudes que aparecen en ella.



Solución:

Para determinar por qué se genera una corriente inducida en el circuito y su sentido, aplicaremos las leyes de la inducción electromagnética de Faraday y Lenz. Cuando una barra metálica se desliza sobre un conductor en presencia de un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular al plano xy, se produce una variación en el flujo magnético a través del circuito formado. Según la *Ley de Faraday-Henry*, cualquier cambio en el flujo magnético a través de un circuito cerrado induce una fuerza electromotriz ($\mathcal{E}$) en dicho circuito:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

donde:

- $\mathcal{E}$ es la fuerza electromotriz inducida (V),
- Φ es el flujo magnético (Wb),
- t es el tiempo (s).

La dirección de la corriente inducida está determinada por la *Ley de Lenz*, la cual establece que la corriente inducida generará un campo magnético que se opone al cambio en el flujo magnético que la produjo. Esto implica que el sentido de la corriente será tal que contrarreste el aumento o disminución del flujo magnético. Consideremos los siguientes parámetros:

- B: Magnitud del campo magnético (T).
- L: Longitud de la barra metálica (m).
- v: Velocidad de deslizamiento de la barra (m/s).

A medida que la barra se desliza con velocidad v, la superficie S encerrada por el circuito aumenta a una tasa $\frac{dS}{dt} = L \cdot v$. Por lo tanto, el flujo magnético Φ cambia con el tiempo:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot cos(0^\circ) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot \frac{dS}{dt} = B \cdot L \cdot v.$$

Aplicando la Ley de Faraday-Henry:

$$\mathcal{E} = -B \cdot L \cdot v.$$

El signo negativo indica, según la Ley de Lenz, que la corriente inducida generará un campo magnético que se opone al cambio en el flujo magnético.

Utilizando la regla de la mano derecha, podemos determinar el sentido de la corriente inducida. Si el campo magnético $\vec{B}$ está dirigido hacia dentro del plano xy (en la dirección $-\vec{k}$), y la barra se desliza hacia la derecha ($+\vec{\imath}$), el flujo magnético está aumentando en la dirección negativa de z. Por la Ley de Lenz, la corriente inducida deberá crear un campo magnético en la dirección opuesta ($+\vec{k}$) para contrarrestar este aumento. Aplicando la regla de la mano derecha, la corriente debe fluir en sentido antihorario.

Por lo tanto, se genera una corriente inducida en el circuito debido a la variación del flujo magnético causada por el movimiento de la barra metálica. El sentido de la corriente inducida es antihorario, de manera que el campo magnético creado por esta corriente se opone al aumento del flujo magnético existente.

Cuestión 5. Ondas

Una onda transversal en una cuerda viene descrita por la función $y(x,t) = a\sin(2\pi bt - cx)$. ¿Qué magnitudes físicas representan a, b y c? ¿Cuáles son sus unidades en el Sistema Internacional? ¿Qué información aporta sobre la onda el signo negativo de la expresión? ¿Qué magnitud física representa el cociente $2\pi b/c$?

Solución:

Consideremos la función que describe una onda transversal en una cuerda:

$$y(x,t) = a\sin(2\pi bt - cx)$$

donde y está en metros, x en metros y t en segundos. Comparando la función dada con la forma general de una onda transversal:

$$y(x,t) = A\cdot\sin(\omega t - kx),$$

podemos identificar que:

- a representa la *amplitud* de la onda,
- b está relacionado con la *frecuencia angular*,
- c representa el *número de onda*.

Sus unidades en el Sistema Internacional son:

- *Amplitud (a)*: Se mide en metros (m).
- *Frecuencia (b)*: La frecuencia angular ω se relaciona con b mediante $\omega = 2\pi b$, por lo tanto, b se mide en Hz (hercios), que es s^{-1}.
- *Número de onda (c)*: Se mide en rad/m (radianes por metro).

El signo negativo en la expresión $-cx$ indica la dirección de propagación de la onda. Específicamente, señala que la onda se está moviendo en la dirección positiva del eje x. Esto se debe a que la fase de la onda disminuye con el aumento de x, lo que implica un movimiento hacia la derecha.

El cociente $2\pi b/c$ representa la *velocidad de propagación* de la onda (v). Podemos derivar esto a partir de las relaciones entre frecuencia, número de onda y velocidad:

$$v = \lambda\cdot f,$$

donde λ es la longitud de onda (m) y f es la frecuencia (Hz). Sabemos que:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{y} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = f\cdot\lambda.$$

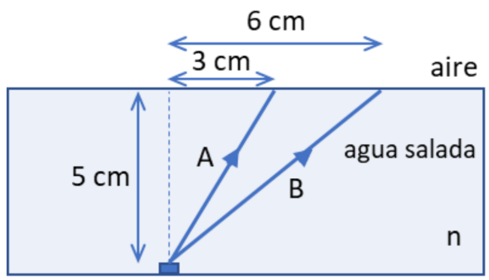
Reemplazando $f = b$ y $k = c$:

$$v = \frac{2\pi b}{c}.$$

Por lo tanto, a es la amplitud de la onda (m), b es la frecuencia (Hz), c es el número de onda (rad/m), el signo negativo indica la dirección de propagación de la onda hacia la derecha, y $2\pi b/c$ representa la velocidad de propagación de la onda (m/s).

Cuestión 6. Ondas

En el fondo de una piscina llena de agua salada se sitúa un pequeño foco luminoso (ver figura adjunta). Se observa que el rayo A se refracta y sale del agua con un ángulo de refracción de 44°, pero el rayo B no se refracta. Determina el índice de refracción n del líquido y explica razonadamente el motivo por el cual el rayo B no se refracta.



Dato: índice de refracción del aire, $n_{\text{aire}} = 1,00$.

Solución:

Tenemos un foco luminoso en el fondo de una piscina llena de agua salada. Se observa que el rayo A se refracta y sale del agua con un ángulo de refracción de $r_A = 44°$, mientras que el rayo B no se refracta. Para determinar el índice de refracción del agua salada, utilizamos la *Ley de Snell*:

$$n_{\text{agua}} \cdot \sin i_A = n_{\text{aire}} \cdot \sin r_A,$$

donde:

- n_{agua} es el índice de refracción del agua salada,
- $n_{\text{aire}} = 1,00$ es el índice de refracción del aire,
- i_A es el ángulo de incidencia del rayo A en el agua,
- $r_A = 44°$ es el ángulo de refracción del rayo A al salir al aire.

Primero, debemos calcular el ángulo de incidencia i_A utilizando trigonometría. Según la figura, para el rayo A tenemos:

$$\tan i_A = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{3 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad i_A = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) = 30,964°.$$

Ahora, aplicamos la Ley de Snell para el rayo A:

$$n_{\text{agua}} \cdot \sin i_A = n_{\text{aire}} \cdot \sin r_A \quad \Rightarrow \quad n_{\text{agua}} = \frac{n_{\text{aire}} \cdot \sin r_A}{\sin i_A}.$$

Sustituimos los valores conocidos:

$$n_{\text{agua}} = \frac{1,00 \cdot \sin 44°}{\sin 30,964°} \quad \Rightarrow \quad n_{\text{agua}} = 1,35.$$

El rayo B no se refracta porque su ángulo de incidencia es mayor que el *ángulo límite* para la reflexión total interna. Cuando la luz pasa de un medio más denso (agua salada) a uno menos denso (aire), existe un ángulo de incidencia a partir del cual toda la luz se refleja internamente y no se refracta al otro medio. Según la figura, para el rayo B:

$$\tan i_B = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{6 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad i_B = \arctan\left(\frac{6}{5}\right) = 50,194°.$$

El ángulo límite se calcula estableciendo que el ángulo de refracción $r = 90°$ (la luz se refracta a lo largo de la superficie):

$$n_{\text{agua}} \cdot \sin i_{\text{lim}} = n_{\text{aire}} \cdot \sin 90°.$$

Como $\sin 90° = 1$:

$$\sin i_{\text{lim}} = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{agua}}} = \frac{1,00}{1,35} = 0,7407 \quad \Rightarrow \quad i_{\text{lim}} = \arcsin(0,7407) = 47,794°.$$

Comparamos i_B e i_{lim}:

$$i_B = 50,194° > i_{\text{lim}} = 47,794°.$$

Dado que el ángulo de incidencia del rayo B es mayor que el ángulo límite, se produce *reflexión total interna*, y el rayo B no se refracta al aire sino que se refleja completamente dentro del agua salada.

Por lo tanto, el rayo B no se refracta porque su ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite para la reflexión total interna en el agua salada con índice de refracción $n = 1,35$.

Cuestión 7. Óptica

Una persona usa habitualmente gafas con lentes y no sabe si éstas son convergentes o divergentes. Se quita las gafas y situándolas a 30 cm de un objeto obtiene sobre una pared una imagen enfocada a $2,7$ m de la gafa. ¿Qué potencia posee la lente? ¿La lente es convergente o divergente? Razona si la persona es miope o hipermétrope.

Solución:

Tenemos que:

- Distancia del objeto a la lente: $s = -30$ cm (negativa porque el objeto está frente a la lente).
- Distancia de la imagen a la lente: $s' = 2,7$ m $= 270$ cm (positiva porque la imagen está del otro lado de la lente).

Utilizamos la ecuación de las lentes delgadas para relacionar las distancias del objeto y la imagen con la distancia focal f:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{270 \text{ cm}} - \frac{1}{-30 \text{ cm}} = \frac{1}{27} \quad \Rightarrow \quad f' = 27 \text{ cm} = 0,27 \text{ m}.$$

Ahora, calculamos la potencia P de la lente utilizando la relación:

$$P = \frac{1}{f'} \quad \text{(donde } f' \text{ está en metros)} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{0,27 \text{ m}} 3,704 \text{ dioptrías}.$$

Por lo tanto, la potencia de la lente es $P = 3,706$ D, que es positiva, por lo que se trata de una lente convergente. Una persona que utiliza lentes convergentes ($P > 0$) generalmente es hipermétrope.

Cuestión 8. Física Moderna

Calcula la velocidad que debe tener una partícula para que su energía relativista sea el doble de su energía en reposo. ¿Sería posible que la velocidad de la partícula fuera el doble que la calculada anteriormente? Razona la respuesta.

Dato: velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Solución:

Queremos determinar la velocidad que debe tener una partícula para que su energía relativista sea el doble de su energía en reposo. Además, analizaremos si es posible que la velocidad de la partícula sea el doble de la calculada. L energía en reposo es:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2,$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula. La energía relativista viene dada por

$$E = \gamma \cdot E_0 = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2,$$

donde:

- γ es el factor de Lorentz, definido como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

- v es la velocidad de la partícula.

Sabemos que

$$E = 2 \cdot E_0.$$

Sustituyendo en la ecuación de la energía relativista:

$$2 \cdot E_0 = \gamma \cdot E_0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2.$$

Otro lado, tenemos que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2.$$

Despejamos v:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot c.$$

Sustituyendo:

$$v = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot c = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c = 0,866 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2,598 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

La velocidad calculada previamente es $v = 2,598 \cdot 10^8$ m/s, que es aproximadamente el $86,6\%$ de la velocidad de la luz ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Si intentamos doblar esta velocidad:

$$v_{\text{doble}} = 2 \cdot v = 2 \cdot 2,598 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 5,196 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Sin embargo, según la *Teoría de la Relatividad Especial* de Einstein, ninguna partícula con masa en reposo puede alcanzar o superar la velocidad de la luz en el vacío (c). La velocidad de la luz es el límite superior para la velocidad de cualquier objeto con masa.

Por lo tanto, la velocidad que debe tener la partícula para que su energía relativista sea el doble de su energía en reposo es aproximadamente $v = 2,598 \cdot 10^8$ m/s y no es posible que la velocidad de la partícula sea el doble de la calculada anteriormente, ya que esto implicaría una velocidad superior a la de la luz (c), lo cual es incompatible con las leyes de la física establecidas por la Teoría de la Relatividad Especial.

Problema 1. Campo Gravitatorio

Una sonda espacial de masa 800 kg se coloca en órbita circular de radio 6500 km alrededor de Venus. Si la energía cinética de la sonda es de $\mathbf{2 \cdot 10^{10}}$ J :

a) **Deduce la expresión de la velocidad orbital de la sonda y calcula la masa de Venus.**
b) **Si Venus es un planeta esférico de densidad $\rho = 5,24$ g/cm^3 obtén la altura, en kilómetros, a la que hay que situar un cuerpo para que la fuerza de atracción gravitatoria que realiza Venus sobre este cuerpo sea un 36% menor que la ejercida en su superficie.**

Dato: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2/kg^2.

Solución:

Tenemos los siguientes datos:

- Masa de la sonda: $m = 800$ kg.
- Radio de la órbita: $r = 6500$ km $= 6,5 \cdot 10^6$ m.
- Energía cinética de la sonda: $E_c = 2 \cdot 10^{10}$ J.
- Constante de gravitación universal: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2/kg^2.
- Densidad de Venus: $\rho = 5,24$ g/cm$^3 = 5240$ kg/m^3.

a) **Deduce la expresión de la velocidad orbital de la sonda y calcula la masa de Venus.**

En una órbita circular, la fuerza centrípeta necesaria para mantener la sonda en órbita es proporcionada por la fuerza gravitatoria ejercida por Venus:

$$F_{\text{centrípeta}} = F_{\text{gravitatoria}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_V \cdot m}{r^2},$$

donde:
- m es la masa de la sonda (800 kg),
- v es la velocidad orbital de la sonda,
- r es el radio de la órbita ($6,5 \cdot 10^6$ m),
- G es la constante de gravitación universal ($6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2/kg^2),
- M_V es la masa de Venus que queremos calcular.

Simplificando la ecuación:

$$v^2 = \frac{G \cdot M_V}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_V}{r}}.$$

Utilizamos la relación entre la energía cinética y la velocidad:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2.$$

Despejamos v:

$$v^2 = \frac{2E_c}{m} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}.$$

Sustituyendo los valores:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{10} \text{ J}}{800 \text{ kg}}} = 7071 \text{ m/s}.$$

A partir de la expresión de la velocidad orbital:

$$v^2 = \frac{G \cdot M_V}{r}.$$

Despejamos M_V:

$$M_V = \frac{v^2 \cdot r}{G}.$$

Sustituyendo los valores calculados y conocidos:

$$M_V = \frac{(7071 \text{ m/s})^2 \cdot 6,5 \cdot 10^6 \text{ m}}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 4,875 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Por lo tanto, la velocidad orbital de la sonda es 7071 m/s y la masa de Venus es $4,875 \cdot 10^{24}$ kg.

b) **Si Venus es un planeta esférico de densidad $\rho = 5,24$ g/cm^3 obtén la altura, en kilómetros, a la que hay que situar un cuerpo para que la fuerza de atracción gravitatoria que realiza Venus sobre este cuerpo sea un 36% menor que la ejercida en su superficie.**

Sabemos que la masa M_V de un planeta esférico está relacionada con su densidad ρ y su radio R mediante:

$$M_V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

Despejamos R:

$$R = \left(\frac{3M_V}{4\pi\rho}\right)^{1/3}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$R = \left(\frac{3 \cdot 4,875 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4\pi \cdot 5240 \text{ kg/m}^3}\right)^{1/3} = 6,07 \cdot 10^6 \text{ m} = 6070 \text{ km}.$$

Queremos que la fuerza gravitatoria a una altura h sea un 36% menor que la fuerza en la superficie. Es decir:

$$F_h = 0,64 \cdot F_0.$$

Sabemos que la fuerza gravitatoria es:

$$F = \frac{G \cdot M_V \cdot m}{r^2},$$

donde:

- r es la distancia desde el centro de Venus hasta el cuerpo ($r = R + h$),
- $F_0 = \frac{G \cdot M_V \cdot m}{R^2}$ es la fuerza en la superficie,
- $F_h = \frac{G \cdot M_V \cdot m}{(R+h)^2} = 0,64 \cdot \frac{G \cdot M_V \cdot m}{R^2}$.

Simplificando la igualdad:

$$\frac{1}{(R+h)^2} = 0,64 \cdot \frac{1}{R^2} \quad \Rightarrow \quad (R+h)^2 = \frac{R^2}{0,64} = \frac{R^2}{0,64} = \frac{R^2 \cdot 100}{64} = \frac{25R^2}{16}.$$

Tomamos la raíz cuadrada de ambos lados:

$$R + h = \frac{5R}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{5R}{4} - R = \frac{R}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{6070 \text{ km}}{4} = 1517,5 \text{ km}.$$

Por lo tanto, la altura a la que hay que situar un cuerpo para que la fuerza de atracción gravitatoria sea un 36% menor que en la superficie es $h \approx 1518$ km.

Problema 2. Campo Electromagnético

Una carga puntual $q_1 = -5\ \mu$C está situada en el punto $A\ (3,\ -4)$ m y otra segunda, $q_2 = 4\ \mu$C, en el punto $B\ (0,\ -5)$ m.

a) **Calcula los vectores campo eléctrico debidos a cada carga y el campo eléctrico total en el origen de coordenadas $O\ (0, 0)$ m. Representa los tres vectores.**

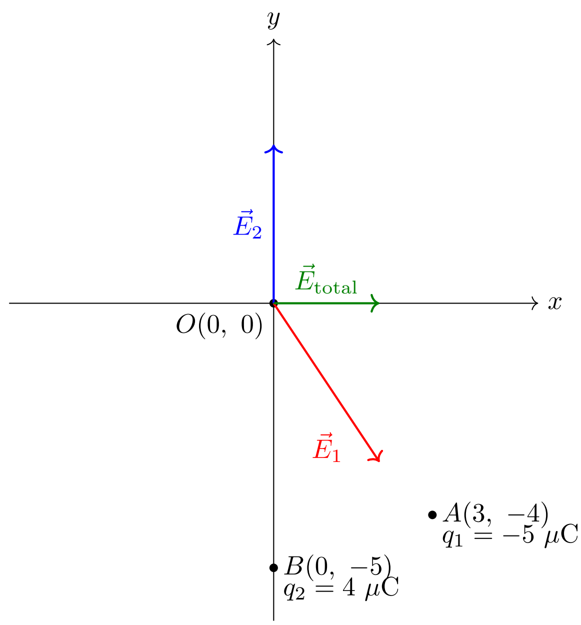
b) **Calcula el potencial eléctrico total producido por las dos cargas en el origen de coordenadas. Calcula el trabajo necesario para trasladar una carga $Q = 1\ \mu$C desde el infinito hasta dicho punto considerando nulo el potencial en el infinito.**

Dato: constante de Coulomb, $k = 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$.

Solución:

a) **Calcula los vectores campo eléctrico debidos a cada carga y el campo eléctrico total en el origen de coordenadas $O\ (0, 0)$ m. Representa los tres vectores.**

Primero, hacemos un diagrama de la situación para entender mejor el problema.



La posición de q_1 es $A(3,\ -4)$ m. El vector de posición desde q_1 hasta el origen es:

$$\vec{r}_1 = \vec{O} - \vec{A} = (0 - 3)\ \vec{\imath} + (0 - (-4))\ \vec{\jmath} = -3\ \vec{\imath} + 4\ \vec{\jmath}\ \text{m}.$$

La distancia desde q_1 hasta O es:

$$r_1 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\ \text{m}.$$

El vector unitario en la dirección de $\vec{r}_1$ es:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{-3\ \vec{\imath} + 4\ \vec{\jmath}}{5} = -0,6\ \vec{\imath} + 0,8\ \vec{\jmath}.$$

El campo eléctrico debido a q_1 en O es:

$$\vec{E}_1 = k\frac{q_1}{r_1^2}\vec{u}_1.$$

Sustituyendo los valores:

$$\vec{E}_1 = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(5\ \text{m})^2}\ (-0,6\ \vec{\imath} + 0,8\ \vec{\jmath}) = (1080\ \vec{\imath} - 1440\ \vec{\jmath})\ \text{N/C}.$$

La posición de q_2 es $B(0,\ -5)$ m. El vector de posición desde q_2 hasta el origen es:

$$\vec{r}_2 = \vec{O} - \vec{B} = (0-0)\ \vec{\imath} + (0-(-5))\ \vec{\jmath} = 0\ \vec{\imath} + 5\ \vec{\jmath}\ \text{m}.$$

La distancia desde q_2 hasta O es:

$$r_2 = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5\ \text{m}.$$

El vector unitario en la dirección de $\vec{r}_2$ es:

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{0\ \vec{\imath} + 5\ \vec{\jmath}}{5} = 0\ \vec{\imath} + 1\ \vec{\jmath}.$$

El campo eléctrico debido a q_2 en O es:

$$\vec{E}_2 = k\frac{q_2}{r_2^2}\vec{u}_2.$$

Sustituyendo los valores:

$$\vec{E}_2 = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(5\ \text{m})^2}\,(0\ \vec{\imath} + 1\ \vec{\jmath}) = 1440\ \vec{\jmath})\ \text{N/C}.$$

Utilizando el principio de superposición:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (1080\ \vec{\imath} + 0\ \vec{\jmath})\ \text{N/C}.$$

Esto significa que el campo eléctrico total en el origen tiene una magnitud de $1{,}08 \cdot 10^4$ N/C y está dirigido en el sentido positivo del eje x.

Por lo tanto, el campo eléctrico en el origen de coordenadas es 1080 $\vec{\imath}$ N/C.

b) **Calcula el potencial eléctrico total producido por las dos cargas en el origen de coordenadas. Calcula el trabajo necesario para trasladar una carga $Q = 1\ \mu$C desde el infinito hasta dicho punto considerando nulo el potencial en el infinito.**

El potencial eléctrico debido a una carga puntual es:

$$V = k\frac{q}{r}.$$

Entonces, el potencial debido a q_1 en O es:

$$V_1 = k\frac{q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{5\ \text{m}} = -9000\ \text{V}.$$

El potencial eléctrico en O debido a q_2 es:

$$V_2 = k\frac{q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{5\ \text{m}} = 7200\ \text{V}.$$

Sumamos los potenciales:

$$V_O = V_1 + V_2 = -9000\ \text{V} + 7200\ \text{V} = -1800\ \text{V}.$$

El trabajo requerido para trasladar una carga $Q = 1\ \mu$C desde el infinito hasta O es:

$$W = Q \cdot \Delta V = Q \cdot (V_O - V_\infty).$$

Dado que el potencial en el infinito es cero ($V_\infty = 0$), entonces:

$$W = Q \cdot V_O.$$

Sustituyendo los valores:

$$W = (1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}) \cdot (-1800\ \text{V}) = -1{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{J}.$$

El trabajo es negativo, lo que indica que el campo eléctrico realiza trabajo sobre la carga al traerla desde el infinito hasta el punto O.

Por lo tanto, el potencial eléctrico total en el origen es $V_O = -1800$ V y el trabajo necesario para trasladar la carga Q desde el infinito hasta el origen es $W = -1{,}8 \cdot 10^{-3}$ J.

Problema 3. Óptica

A partir de un objeto de 15 cm se desea obtener una imagen invertida de tamaño $0,75$ m sobre una pantalla. Para ello se dispone de una lente convergente de 4 dioptrías.

a) **¿Dónde hay que colocar el objeto respecto a la lente? ¿Dónde hay que colocar la pantalla? Realiza un trazado de rayos esquemático que represente lo calculado.**

b) **Supongamos que se rompe la lente anterior y la cambiamos por otra cuya distancia focal imagen es la mitad que la del apartado a). ¿Cuál es la potencia de la nueva lente? Si la distancia entre el objeto y la pantalla es $1,0$ m, determina la menor distancia a la que hay que situar la lente del objeto para obtener una imagen enfocada en la pantalla.**

Solución:

a) **¿Dónde hay que colocar el objeto respecto a la lente? ¿Dónde hay que colocar la pantalla? Realiza un trazado de rayos esquemático que represente lo calculado.**

Datos proporcionados:
- Altura del objeto: $y = +15$ cm.
- Altura de la imagen: $y' = -75$ cm (negativa por ser invertida).
- Potencia de la lente: $P = +4$ D (dioptrías).

Calculamos la distancia focal (f') de la lente:

$$f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{4 \text{ D}} = 0,25 \text{ m} = 25 \text{ cm}.$$

Calculamos el aumento lateral (m):

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{-75 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = -5.$$

La relación entre las distancias y el aumento lateral es:

$$m = \frac{s'}{s}.$$

Despejamos s':

$$s' = m \cdot s = -5 \cdot s.$$

Aplicamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}.$$

Sustituimos s':

$$\frac{1}{-5s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{5s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{6}{5s} = \frac{1}{f'}.$$

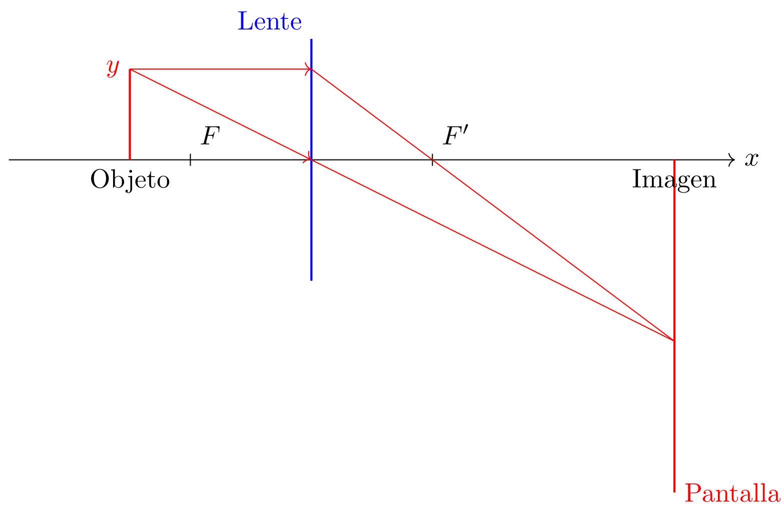
Despejamos s:

$$s = -\frac{6}{5}f' = -\frac{6}{5} \cdot 25 \text{ cm} = -30 \text{ cm}.$$

Hallamos s':

$$s' = -5s = -5 \cdot (-30 \text{ cm}) = 150 \text{ cm}.$$

La construcción del diagrama de rayos es:



Por lo tanto, el objeto se debe colocar a 30 cm a la izquierda de la lente y la pantalla se debe colocar a 150 cm a la derecha de la lente.

b) **Supongamos que se rompe la lente anterior y la cambiamos por otra cuya distancia focal imagen es la mitad que la del apartado a). ¿Cuál es la potencia de la nueva lente? Si la distancia entre el objeto y la pantalla es 1, 0 m, determina la menor distancia a la que hay que situar la lente del objeto para obtener una imagen enfocada en la pantalla.**

Calculamos la nueva distancia focal (f'_{nueva}):

$$f'_{\text{nueva}} = \frac{f'}{2} = \frac{25 \text{ cm}}{2} = 12,5 \text{ cm}.$$

Calculamos la potencia de la nueva lente (P_{nueva}):

$$P_{\text{nueva}} = \frac{1}{f'_{\text{nueva}}} = \frac{1}{0,125 \text{ m}} = 8 \text{ D}.$$

Datos para el cálculo de las posiciones:
- Distancia entre el objeto y la pantalla: $D = 1,0 \text{ m} = 100 \text{ cm}$.
- Relación entre las distancias: $s' - s = D$.

Aplicamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'_{\text{nueva}}}.$$

Sustituimos $s' = D + s$:

$$\frac{1}{D+s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'_{\text{nueva}}}$$

Simplificamos:

$$\frac{1}{D+s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'_{\text{nueva}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{-D}{s(s+D)} = \frac{1}{f'_{\text{nueva}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{s(s+D)} = -\frac{1}{f'_{\text{nueva}}}.$$

Sustituimos los valores numéricos:

$$\frac{100 \text{ cm}}{s(s+100 \text{ cm})} = -\frac{1}{12,5 \text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad s^2 + 100s + 1250 = 0.$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$s = \frac{-100 \pm 70,71}{2}.$$

Primera solución:

$$s = \frac{-100 + 70,71}{2} = \frac{-29,29}{2} = -14,64 \text{ cm}.$$

Segunda solución:

$$s = \frac{-100 - 70,71}{2} = \frac{-170,71}{2} = -85,36 \text{ cm}.$$

Por lo tanto, la potencia de la nueva lente es $P_{\text{nueva}} = +8$ Dy la menor distancia del objeto a la lente es $14,64$ cm.

Problema 4. Física Moderna

En un experimento de efecto fotoeléctrico, al incidir luz con longitud de onda $\lambda_1 = 550$ nm se obtiene una velocidad máxima de los electrones $v = 296$ km/s. Calcula razonadamente:

a) **El trabajo de extracción del metal sobre el que incide la luz (en eV) y la longitud de onda umbral.**
b) **El momento lineal y la longitud de onda de De Broglie asociada, en nanómetros, de los electrones que salen con velocidad máxima.**

Datos: carga eléctrica elemental $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s; masa electrón $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Solución:

a) **El trabajo de extracción del metal sobre el que incide la luz (en eV) y la longitud de onda umbral.**

Datos proporcionados:
- Longitud de onda incidente: $\lambda_1 = 550$ nm $= 5,5 \cdot 10^{-7}$ m.
- Velocidad máxima de los electrones: $v = 296$ km/s $= 2,96 \cdot 10^5$ m/s.
- Constante de Planck: $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s.
- Masa del electrón: $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.
- Velocidad de la luz: $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s.
- Carga del electrón: $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

La energía cinética máxima de los electrones ($E_{c,\max}$) es:

$$E_{c,\max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (2,96 \cdot 10^5 \text{ m/s})^2 = 3,99 \cdot 10^{-20} \text{ J}.$$

La energía del fotón incidente (E_f) es:

$$E_f = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda_1} = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 3,61 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Según la ecuación del efecto fotoeléctrico:

$$E_f = W_{\text{ext}} + E_{c,\max}.$$

Despejamos W_{ext}:

$$W_{\text{ext}} = E_f - E_{c,\max} = 3,61 \cdot 10^{-19} \text{ J} - 3,99 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 3,21 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Convertimos el trabajo de extracción a electronvoltios (eV):

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad \Rightarrow \quad W_{\text{ext}} = \frac{3,21 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 2,01 \text{ eV}.$$

En el umbral, la energía cinética es cero, por lo que:

$$E_f = W_{\text{ext}} \implies h \cdot \frac{c}{\lambda_0} = W_{\text{ext}}.$$

Despejamos λ_0:

$$\lambda_0 = \frac{h \cdot c}{W_{\text{ext}}}.$$

Sustituimos los valores (usando W_{ext} en julios):

$$\lambda_0 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{3,21 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 6,19 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 619 \text{ nm}.$$

Por lo tanto, el trabajo de extracción es $W_{\text{ext}} = 2,01$ eV y la longitud de onda umbral es $\lambda_0 = 619$ nm.

b) **El momento lineal y la longitud de onda de De Broglie asociada, en nanómetros, de los electrones que salen con velocidad máxima.**

El momento lineal del electrón (p) viene dado por

$$p = m \cdot v = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 2,96 \cdot 10^{5} \text{ m/s} = 2,69 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

La longitud de onda de De Broglie ($\lambda_{\text{De Broglie}}$) es:

$$\lambda_{\text{De Broglie}} = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2,69 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 2,46 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 2,46 \text{ nm}.$$

Por lo tanto, el momento lineal de los electrones es $p = 2,69 \cdot 10^{-25}$ kg · m/s y la longitud de onda de De Broglie asociada es $\lambda_{\text{De Broglie}} = 2,46$ nm.